Μαθημα 14º 27/4/2017

Τοπολογια

Ασκηση

Δινεται $f : (E_1, \rho_1) \to (E_2, \rho_2)$ συνεχης

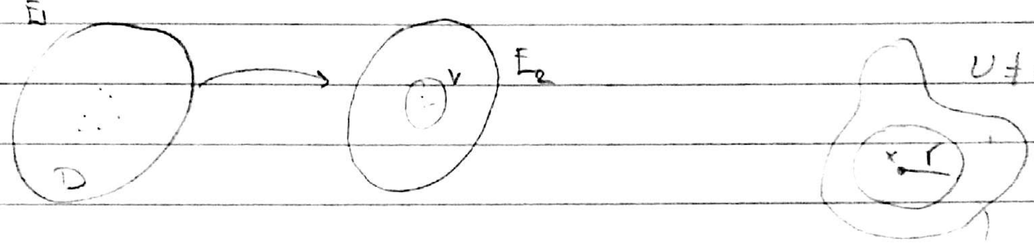
D πυκνο $\subseteq E_1 \Rightarrow$ Δ.Ο $f(D)$ πυκνο $\subseteq E_2$

Λυση

$\bar{D} = E_1 \iff E_1 \subseteq \bar{D}$

$\iff \forall x \in E_1 \Rightarrow x \in \bar{D} \iff \forall x \in E_1 : \forall r > 0 \; B(x,r) \cap D \neq \emptyset$

$\iff \forall \underset{\neq \emptyset}{U} \subseteq E_1$ ανοιχτο $U \cap D \neq \emptyset$ (1)



Θδο $\overline{f(D)} = E_2 \iff \forall \; \emptyset \neq V \subseteq E_2$ ανοιχτο $V \cap f(D) \neq \emptyset$ ΣΤΟΧΟΣ

Εστω $\emptyset \neq V$ ανοιχτο $\subseteq E_2$, Θετω $U = f^{-1}(V)$ ανοιχτο

Ειναι $\neq \emptyset$;

Ξερω οτι $V \neq \emptyset$ ειναι και $U \neq \emptyset$;

- $x \in f^{-1}(V) \iff f(x) \in V$

Εφοσον f επι τοτε $U \neq \emptyset$

(1) $\Rightarrow U \cap D \Rightarrow \underbrace{f^{-1}(V) \cap D}\neq \emptyset$

$\Rightarrow \exists x \in f^{-1}(V) \cap D \Rightarrow \overbrace{x \in f^{-1}(V)}^{x \in E_1}, x \in D \Rightarrow \underbrace{f(x)}_{=y} \in V,$

$f(x) \in f(D)$

Αρα $y \in V \cap f(D) \neq \emptyset$

αλλη αποδειξη (ακολουθιες)

$\bar{D} = E_1 \Rightarrow \overline{f(D)} = E_2 \quad (E_2 \subseteq \overline{f(D)})$

$\forall y \in E_2 \Rightarrow y \in \overline{f(D)}$

Εστω $y \in E_2 \Rightarrow \exists x \in E_1 : f(x) = y$

$x \in E_1 = \bar{D} \Rightarrow x \in \bar{D} \Leftrightarrow \exists (x_n)_n \subseteq D : x_n \to x \overset{f \text{ συν.}}{\Longrightarrow} f(x_n) \to f(x) = y$

$\Rightarrow y \in \overline{f(D)}$ αφου $f(x_n) \in f(D)$ $\forall n$

Ασκηση

(E_1, ρ_1), (E_2, ρ_2) μ.χ εχει 2 τουλαχιστον στοιχεια ας

ειναι y_1, y_2 με $y_1 \neq y_2$

Τοτε Τ.Α.Ε.Ι

1. καθε $f : E_1 \to E_2$ ειναι συνεχης

2. $\forall A \subseteq E_1$: A ανοιχτο

Λυση

$(2 \Rightarrow 1)$ με 2: Υποθεση και 1: Συμπερασμα

Εστω $f : E_1 \to E_2$ τυχαια, θελω νδο ειναι συνεχης σε ολο το E_1

Αρκει νδο αν $V \subseteq E_2$ ανοιχτο $\Rightarrow f^{-1}(V)$ ανοιχτο $\subseteq E_1$

Προφανως ισχυει απο (1)

$(1 \Rightarrow 2)$

υποσυνολο γνησιο υποσυνολο

Εστω $A \neq \emptyset$ και $A \subseteq E_1$ και $A \subset E$

Θελω νδο A ανοιχτο

Οριζω $f : E_1 \to E_2$ με τυπο $f(x) = \begin{cases} y_1, & x \in A \\ y_2, & x \notin A \end{cases}$

- $f^{-1}(\{y_1\}) = A$

  $f^{-1}(\{y_2\}) = A^c = E_1 - A$ (Συμπληρωμα)

f προφανως συνεχης λογω υποθεσης

$\{y_2\}$ κλειστο $\subseteq E_2$ σαν μονοσυνολο $\overset{f \text{ συν.}}{\Longrightarrow} f^{-1}(\{y_2\})$ κλειστο

$\Rightarrow A^c$ κλειστο $\Rightarrow$ A ανοιχτο καθε ακολουθια $\in \{x\} \subseteq E$ ειναι μοναδικη

Ασκηση (4 λεπτά)

i) $f: (E,\rho) \to \mathbb{R}$ συν. στο $E \Rightarrow \{x \in E : f(x)=0\}$ κλειστο

$(\mathbb{R}, |\cdot|)$

Λυση

Εστω $A = \{x \in E : f(x)=0\}$

A κλειστο $\subseteq E$ αφου f συνεχης

$A = f^{-1}(\{0\})$ με $\{0\}$ κλειστο $\subseteq \mathbb{R}$

ii) $f, g : (E,\rho) \to \mathbb{R}$ συν. στο $E \Rightarrow A = \{x \in E : f(x) = g(x)\}$ κλειστο $\subseteq E$

Λυση

Θεωρω τη συναρτηση $h(x) = f(x) - g(x)$, $\forall x \in E$ και συνεχης

$A = \{x : h(x)=0\} = h^{-1}(\{0\})$ κλειστο

iii) $B = \{x \in E : f(x) \leq g(x)\}$ κλειστο

$B = \{x \in E : h(x) \leq 0\} = h^{-1}(\underbrace{(-\infty, 0]}_{\text{κλειστο}})$ κλειστο

με $h(x) = f(x) - g(x)$

Ασκηση

$f : (E,\rho) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$ συνεχης στο $a \in E$

$f(a) > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0 : f(x) > 0 \quad \forall x \in B(a,\delta)$

Λυση

Θα χρησιμοποιησω τον ορισμο συνεχειας στο a

Αρα f συν. στο $a \overset{①}{\Rightarrow} (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)\ \underbrace{\forall x : \rho(x,a) < \delta}_{\forall x \in B_\rho(a,\delta)} \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$

Διαλεγω ενα $\varepsilon = \dfrac{f(a)}{2} > 0$

$\overset{①}{\Rightarrow} \exists \delta > 0 \quad \forall x \in B_\rho(a,\delta) \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \dfrac{f(a)}{2} \Rightarrow$

$-\dfrac{f(a)}{2} < f(x) - f(a) < \dfrac{f(a)}{2} \Rightarrow 0 < \dfrac{f(a)}{2} < f(x) < \dfrac{3f(a)}{2} \quad \forall x \in B_\rho(a,\delta)$

Οριςμος

$f : (E_1, \rho_1) \to (E_2, \rho_2)$

τοτε προκυπτει $g_f : E_1 \to G_f \subseteq E_1 \times E_2$ με $g_f(x) = (x, f(x)) \in G_f$

→ Γραφημα

$G_f = \{(x, f(x)),\ x \in E_1\} \subseteq E_1 \times E_2$

→ Καρτεσιανη (E, ρ)

i) Παντα g_f ειναι 1-1

Αν $g_f(x_1) = g_f(x_2) \overset{\text{δο}}{\Rightarrow} x_1 = x_2$ οπου $x_1, x_2 \in E_1$

$g_f(x_1) = g_f(x_2) \Rightarrow (x_1, f(x_1)) = (x_2, f(x_2)) \Rightarrow x_1 = x_2$

Συνεπως g_f 1-1

ii) g_f επι

$g_f(E_1) = G_f$

$g_f : E_1 \xrightarrow[\text{επι}]{1-1} G_f$ τοτε οριζεται $g_f^{-1} : G_f \to E_1$

$\subseteq E_1 \times E_2$ (υποχωρος)

iii) Η $g_f^{-1} : G_f \to E_1$ ειναι παντα συνεχης

$g_f^{-1}((x, f(x))) = x$
$x \in E_1$

δο η g_f^{-1} ειναι συνεχης στο τυχαιο σημειο

$(x, f(x)) = (x, y) \in G_f \Leftrightarrow y = f(x)$

Εστω τυχουσα $(x_n, y_n) \in G_f$

$(x_n, y_n) \to (x, y)$ (συγκλιση στο καρτ. γινομενο)

δο $\underbrace{g_f^{-1}(x_n, y_n)}_{= x_n} \to \underbrace{g_f^{-1}(x, y)}_{= x}$

$(x_n, y_n) \to (x, y) \Leftrightarrow x_n \xrightarrow{E_1} x$ και $y_n \xrightarrow{E_2} y$

iv) f συνεχης $\Leftrightarrow$ g_f συνεχης

αποδειξη

$(\Rightarrow)$

f συνεχης οδο g_f συνεχης

$g_f : E_1 \to G_f \subseteq E_1 \times E_2$

θεωρουμε τυχαιο $x \in E_1$ με $\underbrace{x_n \xrightarrow{E_1} x}_{①}$

οδο $\underbrace{g_f(x_n)}_{= (x_n, f(x_n))} \to \underbrace{g_f(x)}_{(x, f(x))}$

$= (x_n, f(x_n)) \longrightarrow (x, f(x))$;

λογω ① και επειδη f συνεχης $\Rightarrow$ g_f συνεχης

$(\Leftarrow)$ Αποδειξη σπιτι κανε ντε!

Ασκηση

$(\mathbb{R}^2, \rho)$ ισχυει η αρχη της πληροτητας

καθε βασικη ακολουθια $\Rightarrow$ συγκλινει

$((x_n, y_n))$ βασικη $\Leftrightarrow$ $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ βασικη στο $\mathbb{R}$, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ βασικη στο $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$

$\left.\begin{array}{l} \exists\, x \in \mathbb{R} : x_n \to x \\ \exists\, y \in \mathbb{R} : y_n \to y \end{array}\right\} \Rightarrow (x_n, y_n) \to (x, y)$

→ Επισης ισχυει η αρχη της πληροτητας και στο $(\mathbb{R}^k, \rho)$

Άσκηση

Ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ βασική στον (E,ρ) μ.χ και $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ τ.ω $\rho(a_n,b_n)<\frac{1}{n}$ $\forall\, n=1,2,\dots$

$\Rightarrow$ και $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ βασική

Βασική σημαίνει ότι:

$\forall \varepsilon>0\ \exists n_0\in\mathbb{N}: \forall\, n,m\geq n_0$ με $n,m\in\mathbb{N} \Rightarrow \rho(b_n,b_m)<\varepsilon$

Αυτός ο στόχος για b_n

ισχύει για την (a_n) αφού από υπόθ. βασική

$\rho(b_n,b_m) \underset{\text{τριγ. ανισ.}}{\leq} \rho(b_n,a_n)+\rho(a_n,a_m)+\rho(a_m,b_m) \leq$

$\leq \frac{1}{n}+\rho(a_n,a_m)+\frac{1}{m}$ ① $<\varepsilon$ (θέλω να το κάνω)

Έστω $\varepsilon>0$

Η (a_n) είναι βασική $\Rightarrow \exists n_1\in\mathbb{N}: \forall\, n,m\in\mathbb{N}$ με $n,m\geq n_1$

ισχύει $\rho(a_n,a_m)<\frac{\varepsilon}{3}$

Θέλω να πετύχω του $\frac{1}{n}<\frac{\varepsilon}{3}$ και $\frac{1}{m}<\frac{\varepsilon}{3}$ όμως συγκλίνουσες $(\to 0)$

$\frac{1}{n}\xrightarrow{n\to\infty}0 \Rightarrow \exists n_2\in\mathbb{N}: \frac{1}{n}<\frac{\varepsilon}{3}\ \forall n\geq n_2$

$\frac{1}{m}\xrightarrow{m\to\infty}0 \Rightarrow \exists n_2\in\mathbb{N}: \frac{1}{m}<\frac{\varepsilon}{3}\ \forall m\geq n_2$

Άρα για $n_0=\max\{n_1,n_2\} \overset{①}{\Rightarrow} \rho(b_n,b_m)<3\cdot\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$

άρα βασική